

УДК 539.3

И.И. Сафаров, М.Х. Тешаев, З.И. Болтаев
Бухарский инженерно-технологический институт

Республика Узбекистан, 105017, Бухара
ул. Муртазаева, 15
Safarov54@mail.ru; (+99893 455-44-24), (+99893-6250815)

ВЫНУЖДЕННЫЕ ГАРМОНИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ ВЯЗКОУПРУГИХ СЛОИСТЫХ ТЕЛ, ЛЕЖАЩИХ НА ДЕФОРМИРУЕМОЙ ПОЛУПЛОСКОСТИ

Рассматриваются колебания механической системы, состоящей из вязкоупругих слоев, лежащих на полуплоскости и находящихся в условиях плоской деформации под действием вертикальной гармонической нагрузки. Требуется найти вертикальные и горизонтальные перемещения, а также напряжение точек слоев и полуплоскости. Динамическое состояние каждой из слоистых тел и подпространства описываются уравнениями Ламе механики сплошных сред с операторными коэффициентами. Задача сводится к решению системы неоднородных алгебраических уравнений с комплексными коэффициентами, которая решается методом Гаусса. Исследовано изменение амплитуды перемещений и напряжений в зависимости от частоты. При исследованиях динамического напряженно-деформированного состояния введено понятие глобально резонансной амплитуды (обеспечивающей минимальные значения резонансных амплитуд), которая изменяется радикальным образом для неоднородных механических систем.

Ключевая слова: колебания; диссипативно неоднородная система; подпространство; вязкоупругое тело; частота перемещения и напряжений.

Введение. В динамике конструкций при воздействии цикла напряжений часть механической энергии поглощается в результате диссипационного механизма в материале. Следовательно, необходимо учитывать вязкоупругое действие материала. Многие материалы, например, материалы, используемые в дорожном строительстве на базе битумов, связные грунты, или материалы современной химии – термопласты, обладают отчетливыми вязкоупругими свойствами. Ввиду явного вязкоупругого действия материалов или конструкции актуальными становятся задачи колебаний вязкоупругого слоистого основания.

Впервые систематический подход к исследованию произвольного числа слоев был предложен В. Томсоном [1] и Н. Хаскеллом [2]. Дальнейшее развитие этой теории изложено в работах Л.А. Молоткова [3], И. Данкина [4], И.И. Сафарова, В.П. Майборода, И.Е. Трояновского и др. [6–11]. В работах [14, 15] предлагается решение осе симметричной задачи распространения волн напряжения в слое на полупространстве. Предполагается вязкоупругое поведение материалов слоя и полупространства согласно концепции комплексных модулей упругости. Источником волн напряжения является гармонически сосредоточенное нормальное напряжение на поверхности слоя.

Постановка задачи

Рассмотрим систему, состоящую из k вязкоупругих слоев, лежащих на полуплоскости, и находящуюся в условиях плоской деформации под действием вертикальной нагрузки $p(x, t)$ (рис. 1). Требуется найти вертикальные $\mathcal{G}_k(x, z, t)$ и горизонтальные $u_k(x, z, t)$ перемещения точек слоя и полуплоскости ($k=1, 2, 3, \dots, n$). При этом k -я вязкоупругая среда характеризуется операторными модулями Ламе [12]:

$$\tilde{E}_k f(t) = E_{0k} \left[f(t) - \int_{-\infty}^t R_{Ek}(t-\tau) f(\tau) d\tau \right].$$

Здесь $f(t)$ – произвольная функция времени; $R_{Ek}(t-\tau)$ – ядра релаксаций, E_{0k} – мгновенные модули упругости Юнга ($k=1, \dots, N$).

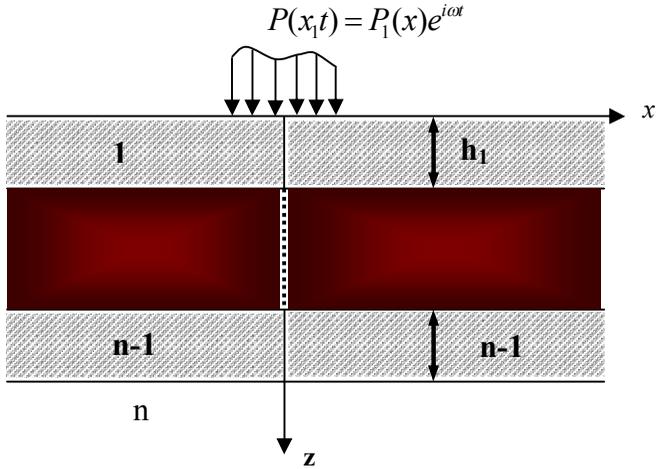


Рис. 1. Расчетная схема

В случае, если $R_{Ek}(t - \tau) = 0$, тогда слоисто – однородная упругая среда характеризуется постоянными Ламе λ_κ , μ_κ , плотностью ρ_κ , скоростями продольной и поперечной волн [13]

$$c_{p\kappa} = \left(\frac{\lambda_\kappa + 2\mu_\kappa}{\rho_\kappa} \right)^{1/2}, \quad c_{s\kappa} = \left(\frac{\mu_\kappa}{\rho_\kappa} \right)^{1/2}.$$

Уравнения движения κ -й среды запишем в виде

$$\rho_\kappa \frac{\partial^2 u_\kappa}{\partial t^2} = \frac{\partial \sigma_{11}^{(\kappa)}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{13}^{(\kappa)}}{\partial z}; \quad \rho_\kappa \frac{\partial^2 g_\kappa}{\partial t^2} = \frac{\partial \sigma_{33}^{(\kappa)}}{\partial z} + \frac{\partial \sigma_{13}^{(\kappa)}}{\partial x},$$

($\kappa = 1, 2, 3, \dots, N$) (1)

где ρ_κ – плотность материалов, σ_{ij}^k – компоненты тензора напряжений

$$\sigma_{11}^{(\kappa)} = E_{1\kappa} \left(\frac{\partial u_\kappa}{\partial x} + \nu_\kappa \frac{\partial g_\kappa}{\partial z} \right); \quad \sigma_{22}^{(\kappa)} = E_{1\kappa} \left(\frac{\partial g_\kappa}{\partial z} + \nu_\kappa \frac{\partial u_\kappa}{\partial x} \right),$$

$$\sigma_{12}^{(\kappa)} = G_k \left(\frac{\partial u_\kappa}{\partial z} + \frac{\partial g_\kappa}{\partial x} \right), \quad (2)$$

$$E_{1\kappa} = \frac{\bar{E}_\kappa}{1 - \nu_\kappa^2}, G = \frac{\bar{E}_\kappa}{1 + \nu_\kappa}.$$

Перемещения u_κ и \mathcal{G}_κ удовлетворяют одному из следующих граничных условий на поверхности слоистого тела:

- I. $\sigma_{33}^1 = -q_1(x, t), \sigma_{13}^1 = -q_2(x, t)$ при $z=0$;
- II. $\mathcal{G}_1 = q_1(x, t), \sigma_{13}^1 = -q_2(x, t)$ при $z=0$; (3,а)
- III. $\mathcal{G} = q_1(x, t), \sigma_{13}^1 = -q_2(x, t)$ при $z=0$

и нулевым начальным условиям

$$u_\kappa = \mathcal{G}_\kappa = \frac{\partial u_\kappa}{\partial t} = \frac{\partial \mathcal{G}_\kappa}{\partial t} = 0 \quad \text{при } t=0. \quad (3,б)$$

В случае воздействия гармонических нагрузок на поверхности слоистого тела и на границах между вязкоупругими слоями выполняются условия жесткого контакта, тогда граничные условия принимают вид:

$$\begin{aligned} \sigma_{33}^1(x, 0, t) &= -p(x)e^{-i\alpha t}, \\ \sigma_{13}^1(x, 0, t) &= 0, \\ &\dots\dots\dots \\ \sigma_{33}^k(x, h_k, t) &= \sigma_{33}^{k+1}(x, h_k, t), \\ \sigma_{13}^k(x, h_k, t) &= \sigma_{13}^{k+1}(x, h_k, t), \\ u_k(x, h_k, t) &= u_{k+1}(x, h_k, t), \\ \mathcal{G}_k(x, h_k, t) &= \mathcal{G}_{k+1}(x, h_k, t), \quad \kappa = 1, 2, \dots, n. \end{aligned} \quad (4)$$

Определения амплитуды перемещений и напряжений в зависимости от частоты при различных параметрах плоских слоистых тел при воздействии гармонических нагрузок, является основной целью работы.

Методы решения. Решение полученного уравнения (1)

ищем в виде:

$$\begin{aligned} u_\kappa &= U_\kappa(z) e^{i(\gamma x - \omega t)}; \\ \mathcal{G}_\kappa &= V_\kappa(z) e^{i(\gamma x - \omega t)}, \end{aligned} \quad (6)$$

ω – круговая частота, которая является комплексной величиной при спектральных задачах и действительной величиной для вынужденных колебаний; $U_\kappa(z)$ и $V_\kappa(z)$ – амплитуды перемещений; $\lambda=2\pi/\gamma$ – длина волны, γ – волновое число. Подставим (6) в (1) с учетом (2), тогда получим следующие обыкновенные дифференциальные уравнения:

$$L_\kappa \frac{dV_\kappa}{dz} - L_{2\kappa} U_\kappa - G_\kappa \frac{d^2 U_\kappa}{dz^2} = 0; \quad (7)$$

$$L_\kappa \frac{dU_\kappa}{dz} - L_{3\kappa} V_\kappa - L_{4\kappa} \frac{d^2 V_\kappa}{dz^2} = 0;$$

$$L_{1\kappa} = \left(\frac{\bar{E}_\kappa v_\kappa}{1-v_\kappa^2} + G_\kappa \right) i\gamma; \quad L_{2\kappa} = \rho_\kappa \omega^2 - \frac{\bar{E}_\kappa}{1-v_\kappa^2} \gamma^2;$$

где

$$L_{3\kappa} = \rho_\kappa \omega^2 - G_\kappa \gamma^2; \quad L_{4\kappa} = \frac{\bar{E}_\kappa}{1-v_\kappa^2}.$$

После введения вспомогательной функции $\Phi_\kappa(z)$ отношениями

$$U_\kappa = L_{1\kappa} \frac{d}{dz} \Phi_\kappa; \quad V_\kappa = \left[L_{2\kappa} + G_\kappa \frac{d^2}{dz^2} \right] \Phi_\kappa, \quad (8)$$

получим из (8) дифференциальное уравнение четвертого порядка

$$\frac{d^4 \Phi_\kappa}{dz^4} + L_{5\kappa} \frac{d^2 \Phi_\kappa}{dz^2} + L_{6\kappa} \Phi_\kappa = 0, \quad (9)$$

где

$$L_{5\kappa} = -2\gamma^2 + \frac{(3-v_\kappa)\omega^2}{2c_{s\kappa}^2 \Gamma_\kappa};$$

$$L_{6\kappa} = \gamma^2 - \frac{(3-v_\kappa)\omega^2 \gamma^2}{2c_{s\kappa}^2 \Gamma_\kappa} + \frac{\omega^4}{c_{p\kappa}^2 c_{s\kappa}^2 (\Gamma_\kappa)^2};$$

$\Gamma_\kappa = 1 - \Gamma_\kappa^C(\omega) - i\Gamma_\kappa^S(\omega)$; $c_{p\kappa}^2 = (\lambda_\kappa + 2\mu_\kappa)/\rho_\kappa$; $c_{s\kappa}^2 = \mu_\kappa/\rho_\kappa$ – скорости распространения продольных и поперечных волн.

Решение уравнений (9) выражается через экспоненциальные функции

$$\Phi_{\kappa}(y) = A_{\kappa}e^{\alpha_{\kappa}y} + B_{\kappa}e^{-\alpha_{\kappa}y} + C_{\kappa}e^{S_{\kappa}y} + D_{\kappa}e^{-S_{\kappa}y}, \quad (10)$$

где

$$q_{\kappa}^2 = \gamma^2 \left(1 - \frac{c^2}{c_{p\kappa}^2}\right); \quad S_{\kappa}^2 = \gamma^2 \left(1 - \frac{c^2}{c_{s\kappa}^2}\right), \quad \bar{c}_{s\kappa}^2 = c_{s\kappa}^2 \Gamma_{\kappa}, \quad \bar{c}_{p\kappa}^2 = c_{p\kappa}^2 \Gamma_{\kappa},$$

где $A_{\kappa}, B_{\kappa}, C_{\kappa}, D_{\kappa}$ – комплексные произвольные постоянные, которые определяются из граничных условий (4). Задача сводится системы алгебраических уравнений с комплексными коэффициентами

$$[C(\omega, c_{s\kappa}, c_{p\kappa}, \Gamma_{\kappa}, h_{\kappa})]\{q\} = \{p\}, \quad (11)$$

где $[C]$ – квадратная матрица ($2\kappa \times 2\kappa$), элементы которой состоят из экспоненциальных функций с комплексными параметрами, $\{q\}$ – содержит неизвестных, т.е. $A_{\kappa}, B_{\kappa}, C_{\kappa}, D_{\kappa}$; $\{p\}$ – состоит из амплитуды внешних нагрузок. Определим зависимость резонансных амплитуд $A_{\eta mj}$ (η – компоненты напряжения (σ_{le} , $l, e=1, 2, 3$), и перемещения (u_l), m – номер координаты, j – номер резонансных частот) от параметров механической системы.

Алгоритм построения этой зависимости включает построения амплитудно-частотных характеристик для каждой компоненты амплитуды перемещений и напряжений и нахождение максимумов $A_{\eta mj}$ на каждой из них. Для отыскания максимумов и минимумов на резонансной кривой применим метод Мюллера [11]. Амплитудная – частотная характеристика – это кривая, описываемая уравнением $A_{\eta mj} = |A_{\sigma mj}|$. Ее минимумы и максимумы удовлетворяют уравнению

$$\frac{\partial A_{\eta mj}(\omega)}{\partial \omega} = 0. \quad (12)$$

Необходимо найти корни уравнения (12). Для этого надо вычислить левые части (12) при заданных значениях $\omega = \omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$. Выбрав $\Delta\omega = 10^{-4} - 10^{-6}$, определим про-

изводные по формуле
$$\frac{\partial A_{\eta mj}(\omega)}{\partial \omega} = \frac{A_{\eta mj}(\omega_j + \Delta\omega) - A_{\eta mj}(\omega_j - \Delta\omega)}{2\Delta\omega} = 0.$$

Система алгебраических уравнений (11) решается методом Гаусса с выделением главного элемента.

С помощью решений (6), (8) и (10) найдем выражения смещения k -го слоя

$$u_k = i\gamma [A_k q_k \exp(q_k z) - B_k q_k \exp(-q_k z) + C_k S_k \exp(S_k z) - D_k S_k \exp(-S_k z)] e^{j(\gamma x - \omega t)},$$

$$g_k = [-A_k q_k \exp(q_k z) - B_k q_k \exp(-q_k z) - C_k \gamma^2 \exp(S_k z) - D_k \gamma^2 \exp(-S_k z)] e^{j(\gamma x - \omega t)}. \quad (13)$$

Перемещения (13) для полупространства удовлетворяют условию экспоненциального затухания по координате z ($z \rightarrow \infty$).

В качестве примера рассмотрим колебания слоя, лежащего на полупространстве от вертикальной гармонической нагрузки. Тогда основной определитель (11) (6x6) $[C]$ принимает следующий вид

$$[C] = \begin{vmatrix} (1 + \bar{s}_1^2) e^{-\bar{q}_1} & (1 + \bar{s}_1^2) e^{\bar{q}_1} & -2e^{\bar{q}_1} & \dots & \dots & 2e^{\bar{q}_1} & \dots & \dots & 0 & \dots & \dots & 0 \\ -2\bar{q}_1 e^{\bar{q}_1} & \dots & 2\bar{q}_1 e^{\bar{q}_1} & \dots & \left(\bar{s}_1 + \frac{1}{\bar{s}_1}\right) e^{-\bar{q}_1} & \dots & \left(\bar{s}_1 + \frac{1}{\bar{s}_1}\right) e^{\bar{q}_1} & \dots & \dots & 0 & \dots & \dots & 0 \\ (1 + s_1^2) e^{\bar{q}_1} & \dots & (1 + \bar{s}_1^2) e^{-\bar{q}_1} & -2e^{\bar{q}_1} & \dots & 2e^{-\bar{q}_1} & \dots & (1 + s^2)\gamma_1 & -2/\gamma_1 & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -2\bar{q}_1 e^{\bar{q}_1} & \dots & 2\bar{q}_1 e^{\bar{q}_1} & \dots & \left(\bar{s}_1 + \frac{1}{\bar{s}_1}\right) e^{\bar{q}_1} & \dots & \left(\bar{s}_1 + \frac{1}{\bar{s}_1}\right) e^{-\bar{q}_1} & \dots & \frac{2\bar{q}_1}{\gamma_1} & \dots & \left(\bar{s} + \frac{1}{\bar{s}}\right)/\gamma & \dots & \dots \\ e^{\bar{q}_1} & \dots & e^{\bar{q}_1} & \dots & e^{\bar{q}_1} & \dots & e^{\bar{q}_1} & \dots & \dots & \dots & -1 & \dots & \dots & -1 \\ \bar{q} e^{\bar{q}_1} & \dots & \bar{q}_1 e^{-\bar{q}_1} & \dots & \dots & -\frac{1}{\bar{s}} e^{\bar{q}_1} & \dots & -\frac{1}{\bar{s}} e^{\bar{q}_1} & \dots & \dots & -\bar{q} & \dots & \dots & \frac{1}{\bar{s}} \end{vmatrix}$$

где ζ – безразмерное волновое число, $\zeta = \gamma h$, $\gamma_1 = \bar{\mu}_1 / \bar{\mu}$.

Рассмотрим два варианта механической системы. Для численного решения задачи использовано следующих значений параметров:

$$c_{p1} = 5400 \text{ м/с}, c_{p1} = 3195 \text{ м/с}, c_{s1} = 2300 \text{ м/с}, c_{s2} = 1311 \text{ м/с},$$

$$\nu_1 = 0.30, \nu_1 = 0.35, \rho = 0.283 \text{ МПа с}^2 \text{ м}^{-4}, \rho = 0.126 \text{ МПа с}^2 \text{ м}^{-4}.$$

При вычислениях приняты безразмерные параметры:

$$c_p^1 = \frac{3195}{5400} = 0,5917, c_s^1 = \frac{2300}{5400} = 0,4259,$$

$$c_s^2 = \frac{1311}{5440} = 0,2428, c_{ss}^2 = \frac{1311}{3195} = 0,4103, \rho_0 = \frac{0,126}{0,283} = 0,4452.$$

В первом варианте рассмотрена диссипативно однородная механическая система. Результаты расчета первого варианта приведены на рис. 2, а, б, в, г.

Зависимость безразмерной резонансной амплитуды $|A_{\sigma_{33,jk}}| = \left| \frac{A_{\sigma_{33,jk}}}{\sigma_p} \right|$ ($|A_{\sigma_{33,jk}}|$ – амплитуда напряжений, $|\sigma_p|$ – амплитуда напряжений действующей нагрузки) ($j=1,2$) от параметра h/λ изменилась монотонным образом (рис. 2, а).

Соответствующие амплитудно-частотные характеристики напряжений для трех сечений (рис. 2, а) приведены на рис. 2, б, в, г. Полученные амплитудно-частотные характеристики полностью согласуются с результатами работы [7].

Во втором варианте слой упругий: $R_1 = 0$, остальные параметры совпадают с принятыми выше.

Результаты расчета представлены на рис. 3, а, б, в, г, согласно которым при максимальном сближении собственных частот соответствующие амплитуды $|A_{\sigma_{3311}}|$ и $|A_{\sigma_{3312}}|$ становятся равными [11].

Зависимость $|A_{\sigma_{33,jk}}|$ от параметра h/λ для диссипативно неоднородных механических систем оказалась немонотонным.

Демпфирующие свойства системы в целом при вынужденных колебаниях определяются максимальной резонансной амплитудой (назовем ее глобальной резонансной амплитудой). Интенсивность диссипативных процессов в системе тем выше, чем ниже глобальная резонансная амплитуда:

$$\delta_{\sigma_k} = \max_{\omega} (|A_{\sigma_{jk}}|), \quad k=1,2,\dots,N. \quad (14)$$

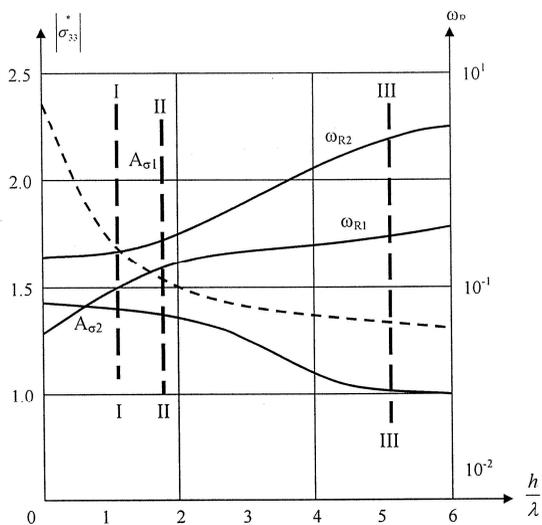


Рис. 2, а. Зависимость резонансной амплитуды от h/λ (диссипативно однородная система)

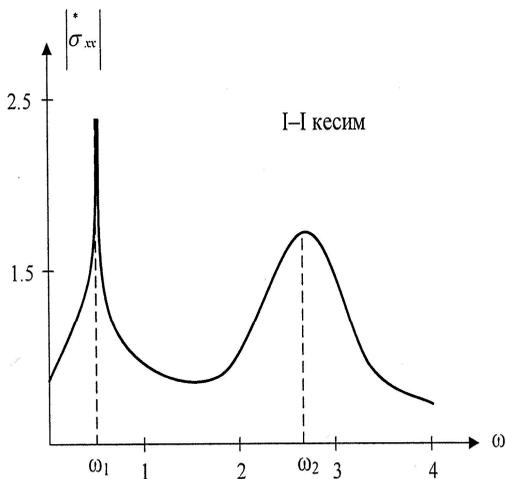


Рис. 2, б. Амплитудно-частотные характеристики (I-I сечения) (диссипативно однородная система)

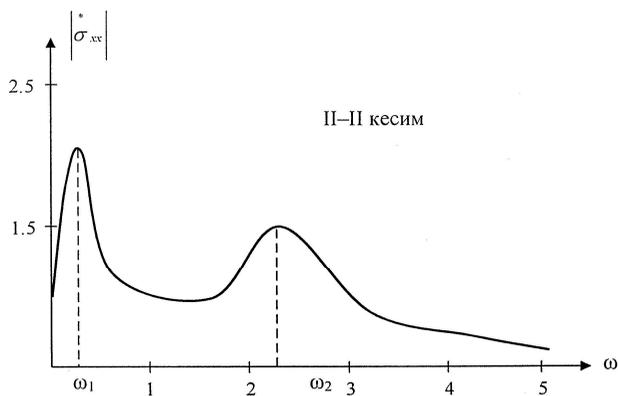


Рис. 2, в. Амплитудно-частотные характеристики (II–II сечения) (диссипативно однородная система)

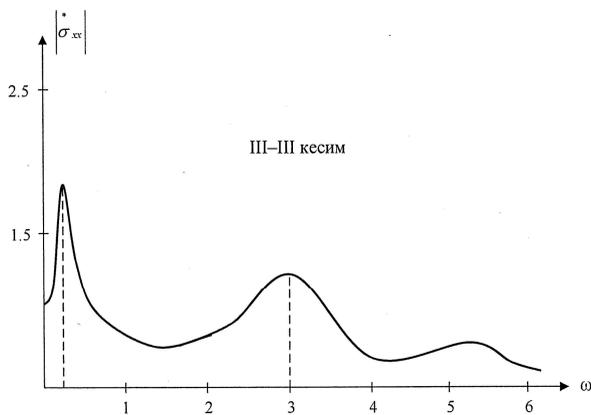


Рис. 2, г. Амплитудно-частотные характеристики (III–III сечения) (диссипативно однородная система)

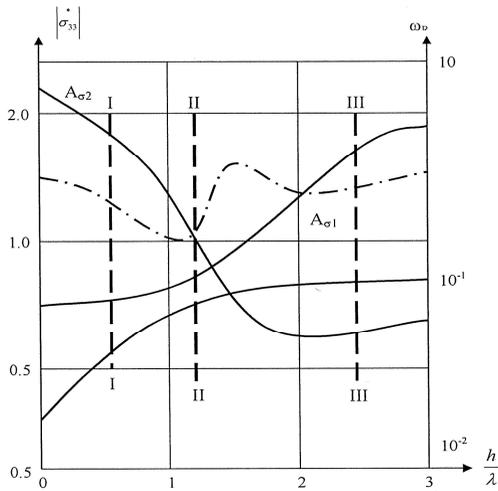


Рис. 3, а. Зависимость резонансной амплитуды от h/λ (диссипативно неоднородная механическая система)

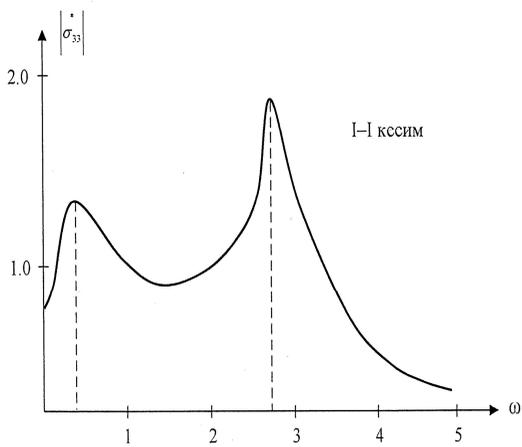


Рис. 3, б. Амплитудно-частотные характеристики (I-I сечения) (диссипативно неоднородная механическая система)

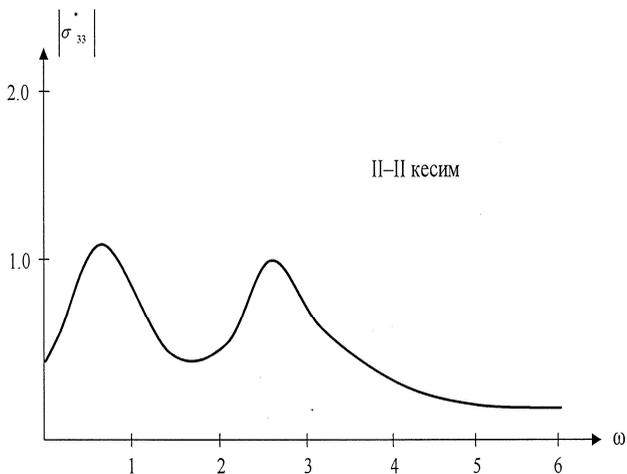


Рис. 3, в. Амплитудно-частотные характеристики (II–II сечения) (диссипативно неоднородная механическая система)

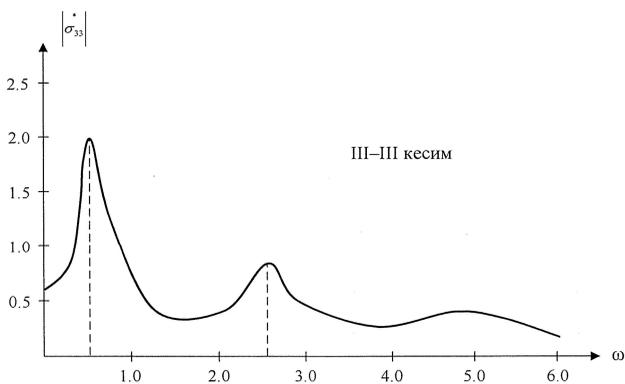


Рис. 3, г. Амплитудно-частотные характеристики (III–III сечения) (диссипативно неоднородная механическая система)

В диссипативно однородной системе роль глобальной амплитуды выполняет при всех значениях параметра первая резонансная амплитуда. В диссипативно неоднородной системе в роли глобальной амплитуды выступает в зависимости от величины параметра как первая, так и вторая резонансные амплитуды. "Смена ролей" происходит при характерном значении параметра, при котором действительные части собственных частот наиболее близки.

При этом значении параметра глобальная резонансная амплитуда минимальна и, следовательно, диссипативные процессы в системе протекают наиболее интенсивно, а глобальный коэффициент демпфирования имеет ярко выраженный максимум (или минимум) [7–9, 11]. Из результатов расчетов видно, что минимальное значение амплитуды напряжений достигается во вторых сечениях для диссипативно неоднородных механических систем (рис. 3, в).

Выводы

1. Демпфирующие свойства механической системы при вынужденных колебаниях определяется максимальной резонансной амплитудой (глобальной резонансной амплитудой). Интенсивность диссипативных процессов в системе тем выше, чем ниже глобальная резонансная амплитуда (рис. 3, в). В диссипативно однородной механической системе роль глобальной амплитуды при всех значениях параметров выполняет первая резонансная амплитуда, а в диссипативно неоднородной – зависимости от величины (глобальной амплитуды) параметра как первая, так и вторая резонансные амплитуды.

2. "Смена ролей" происходит при характерном значении параметра, при котором действительные части собственных частот наиболее близки. При этом значении параметра глобальная резонансная амплитуда минимальна и, следовательно, диссипативные процессы в системе протекают наиболее интенсивно, а глобальный коэффициент демпфирования имеет ярко выраженный максимум [7–9, 11].

Библиографический список

1. *Thomson W.T.* Transmission of elastic waves through a stratified solid material // *J. Appl. Phys.* 1950. 21, № 1. P. 89–93.

2. *Haskell N.A.* The dispersion of surface waves in multi-layered media // *Bull. Seism. Soc. Amer.* 1953. 43, № 1. P. 17–34.

3. *Молотков Л.А.* О распространении упругих волн в средах, содержащих тонкие плоскопараллельные слои // *Вопр. динам. теории распространения сейсм. волн.* 1961. №5. С. 240–280.

4. *Dunkin I.W.* Computation of modal solutions in layered elastic media at high frequencies // *Bull. Seism. Soc. Amer.* 1965. 55, № 2. P. 335–358.

5. *Каюмов С.С., Сафаров И.И.* Распространение и дифракция волн в диссипативно–неоднородных цилиндрических деформируемых механических систем. Ташкент: ФАН, 2002. 214 с.

6. *Сафаров И.И.* Распространения волн в слое, лежащем в вязкоупругом полупространстве: тез. докл. конф. "Опыт применения композитных материалов в сельскохозяйственном машиностроении", Чернягов, 1985. С. 91–92.

7. *Сафаров И.И., Майборода В.П., Трояновский И.Е., Возагашвили М.Г.* Волны в слое на деформируемом полупространстве // *Расчеты на прочность.* М.: 1984. Вып. 25. С. 213–220.

8. *Safarov I.I., Teshaev M.Kh., Boltaev Z.I., Akhmedov M.Sh.* Common natural in dissipative inhomogeneous plane Bodies/Discover 2016. 52, (251). С. 2108–2126.

9. *Safarov I.I., Teshaev M.Kh., Akhmedov M.Sh.* Vibrations dissipative plate mechanical systems with point // *The International Quarterly journal/Science & Technology*, 2016. 2(8). P. 437–450.

10. *Safarov I.I., Akhmedov M. Sh., Qilichov O.* Dynamics of underground pipeline from the flowing fluid. Lambert Academic Publishing (Germany). 2016. 345 p.

11. *Сафаров И.И., Ахмедов М.Ш., Болтаев З.И.* Собственные волны в слоистых средах. Lambert Academic Publishing (Germany). 2016. 192 с.

12. *Колтунов М.А.* Ползучесть и релаксация. М.: Высшая школа, 1976.

13. *Новацкий В.* Теория упругости. М.: Мир, 1975. 872 с.

14. *Мартинчек Г.* Динамическая вязкоупругость в техническом применении // *Успехи механики*, 1983. Т. 6, вып. ¾. С. 1–28 с.

15. *Мартинчек Г.* Определение динамических вязкоупругих характеристик методом механического импеданса // *Механика композитных материалов.* Рига. 1980. № 4. С. 708–712.